数　　　学

1　研究のテーマ

(1) 研究テーマ

数学的活動の一層の充実と評価

(2) 研究のねらい

学習指導要領で重視している主体的・対話的で深い学びの視点からの授業改善をしていく中で指導と評価は切り離せない関係にある。

本研究では、数学科の学習指導要領改訂の趣旨である数学的活動の一層の充実に焦点を当てた。指導と評価の一体化の視点からも数学的活動を充実させせることが重要であると考え、ねらいとした。

2　実践事例１

(1) 単元指導計画

ア　科目名：数学Ⅱ

イ　単元名：図形と方程式　軌跡と領域

ウ　単元の目標：軌跡と領域について理解し、それらを活用して問題を解決する活動を通して、事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。

エ　単元の評価規準

知識・技能	思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
①　軌跡について理解し、簡単な場合について軌跡を求めることができる。 ②　簡単な場合について、不等式の表す領域を求めたり領域を不等式で表したりすることができる。	①　数量と図形との関係などに着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、コンピュータなどの情報機器を用いて軌跡や不等式の表す領域を座標平面上に表すなどして、問題解決に活用したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。	①　事象を図形と方程式の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く柔軟に考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。 ②　問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。

オ　単元の指導と評価の計画　〇「記録に残す評価」　●「指導に生かす評価」

次	時	学習活動	知	思	態	評価のポイント・指導上のポイント
第一次	2時間扱	単元の見通し ・方程式で表された図形の作品の鑑賞会をするための課題、できるようになりたいことを明らかにする。			〇	【評価のポイント】 (態)単元の目標を理解し、学習を見通せているか評価する。
第二次	5時間扱	直線の方程式 ・関数と方程式の違いを理解し、座標平面上における直線のかき方を理解する。 平行な直線、垂直な直線 ・「道路の絵」をかき、平行な直線、垂直な直線の性質を見いだす。 内分点と外分点、点と直線の距離 ・グラフ上の角の二等分線の式を求めることを通して、内分点と外分点、点と直線の距離の公式を導く。	〇 〇	 ●		【評価のポイント】 (知)図形、グラフ、直線の方程式の関連付け、公式の意味の理解ができているか評価する。 【指導上のポイント】 「平行・垂直な道路の絵」「角の二等分線の絵」等、座標平面上の図を絵として捉えられるようにし、関数との違いを強調したい。また、中学までの関数の学習と関連付けながら指導を行う。

		・軌跡の考え方を理解する。				
第三次	4時間扱	円の方程式 ・軌跡の考え方を用いて、座標平面上における円のかき方を理解する。 ・円と直線の関係を、「方程式の視点」「図形の視点」の両面から考察する。	○	●		【評価のポイント】 (知)図形、グラフ、円の方程式を関連付けて理解できているか、公式の意味を理解しているかを評価する。 また、軌跡の考え方の基本を理解しているか評価する。
第四次	2時間扱	図形の証明 ・「平行四辺形の対角線が中点で交わることの証明」を、座標を使う方法と使わない方法の二通りで証明する。 ・座標を使った証明のよさを理解する。		○	○	【評価のポイント】 (思)座標を自ら設定し証明ができているか、レポートで評価する。 (態)座標を使った証明のよさを認識し、説明しようとしているか、評価する。
第五次	6時間扱	軌跡と領域 ・「板が滑りながらたおれるとき、板の中点の軌跡はどのような図形になるか」を通して、軌跡の方程式の求め方を理解する。 ・「売り上げを最大にするには」「スカイツリーと東京タワー同じ高さに見えるのはどこか」について考える。 方程式で表された図形の作品の鑑賞会 ・作品鑑賞会を行う。 ・単元の振り返りを行う。	○	○ ●	● ●	【評価のポイント】 (知)身近な問題を解決するために必要な知識が関連付けられているかどうか評価する。 (思)身近な問題を数学的に解決できているか、レポートで評価する。 (態)単元を通して、自分の気付きや成長を認識し、説明しようとしているか、振り返りを通して評価する。

カ　授業実践例　(15 時間目／19 時間)

【】：対応する数学的活動

<table>
<tr><td>時間
65分</td><td>学習活動　S:予想される生徒の反応</td><td>指導上の留意点　T:教師の手立て</td></tr>
<tr><td rowspan="2">５分</td><td>・課題の説明</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>日常生活や社会の事象</u>
Ｑ１　玉ねぎ500個、ひき肉80kg、卵100ダース使って、「ハンバーグ」と「オムレツ」を作りたい。すべて売れたとして最も売り上げを大きくするためにはハンバーグ（販売価格：500円）とオムレツ（販売価格：400円）は何個ずつ作ればよいでしょうか。
（ハンバーグ材料：ひき肉100ｇ、玉ねぎ1/2個、卵1/2個
オムレツ材料：ひき肉70ｇ　、玉ねぎ１個、卵３個）</td></tr>
<tr><td rowspan="4">25分</td><td>・個人で検討
・グループ検討
<検討></td><td></td></tr>
<tr><td>Ｓ１：材料を全部ハンバーグ(オムレツ)に使ったときの売り上げを比べてみる。
Ｓ２：ハンバーグ(オムレツ)を１個減らしたときの増え方を調べる。
Ｓ３：ハンバーグとオムレツの個数の組合せをすべて調べる。
Ｓ４：不等式にして調べる。
Ｓ５：分からない。</td><td>Ｔ１：(Ｓ１に対して)ハンバーグとオムレツ両方作ったときに売り上げが大きくなることはないかな。
Ｔ２：(Ｓ２に対して)ハンバーグを１個減らしたとき、オムレツは何個作れるかな。どのように関係を明らかにしようか。
Ｔ３：(Ｓ３に対して)組合せを全部書き出すのは大変そう。工夫して求められないかな。
Ｔ４：(Ｓ４に対して)式をかかせクラスで検討する。
ハンバーグを個数をx個、オムレツをy個作るとする。
$$\begin{cases} 100x+70y \leqq 80000 & \cdots(\text{ひき肉に関する式}) \\ \frac{1}{2}x+y \leqq 500 & \cdots(\text{玉ねぎに関する式}) \\ \frac{1}{2}x+3y \leqq 1200 & \cdots(\text{卵に関する式}) \\ x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$
Ｔ５：(Ｓ１の考えを活用)全部ハンバーグ、全部オムレツだとどっちが売り上げを大きくできるだろう。</td></tr>
<tr><td><想定される結論>
・２元１次の連立不等式をつくり、数学の問題に書き換える。</td><td><u>・不等式を解く問題へ書き換えたい。【Ａ１】</u></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>数学的に表現した問題</u>
Ｑ２　x,y が $\begin{cases} 100x+70y \leqq 80000 & \cdots(\text{ひき肉}) \\ \frac{1}{2}x+y \leqq 500 & \cdots(\text{玉ねぎ}) \\ \frac{1}{2}x+3y \leqq 1200 & \cdots(\text{卵}) \\ x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}$ を満たす、 $500x+400y$ の最大値を求めよ。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">10分</td><td>・グループ検討
<検討></td><td></td></tr>
<tr><td>Ｓ１：xとyに数値をいろいろと代入してみる。
Ｓ２：グラフ(領域)にしてみる。
Ｓ３：分からない。</td><td>Ｔ１：(Ｓ１，Ｓ３に対して)見て分かるような形で表現し直せないかな。
Ｔ２：(Ｓ２に対して)領域のどの部分が最大値になるだろうか。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>・領域は点の集まり(x,yの組)を表す。領域の境界線上の点が最大になるのではないか。
・座標がハンバーグとオムレツの個数を表している。</td><td>・Desmos(グラフ作成アプリ)を使って、可視化させて検討させたい。

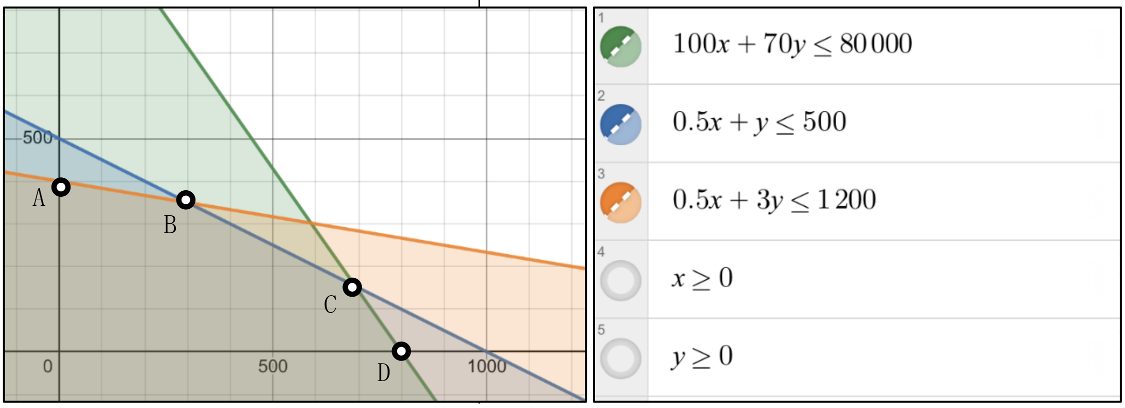
・座標は何を表しているか問いたい。</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">

図１　ハンバーグとオムレツの関係式、及びそのグラフ</td></tr>
<tr><td></td><td><u>焦点化した問題</u>
<u>「領域内の点で$500x+400y$が最も大きくなるのはどこか。【Ｂ】」について考える。</u></td><td>・一度、問題を焦点化し、解決の見通しを共有しておきたい。</td></tr>
<tr><td colspan="3"><想定される考え１>点Ａ～Ｄの座標を確認し、$500x+400y$の値が最も大きくなる点が最大値である。</td></tr>
<tr><td>分岐
１
15分</td><td>・各点の座標から最大値を求める
点Ａ(0, 400)
→　500×0＋400×400=160, 000
点Ｂ(300, 350)
→　500×300＋400×350=290, 000
点Ｃ$\left(\frac{9000}{13}, \frac{2000}{13}\right) \fallingdotseq (692.3, 153.8)$
→　$500\times\frac{9000}{13}+400\times\frac{2000}{13}\fallingdotseq$<u>407, 692</u>
点Ｄ(800, 0)
→　500×800＋400×0=400, 000

・点Ｅの点が最大で、売り上げの最大値は407, 600円と考えられる。

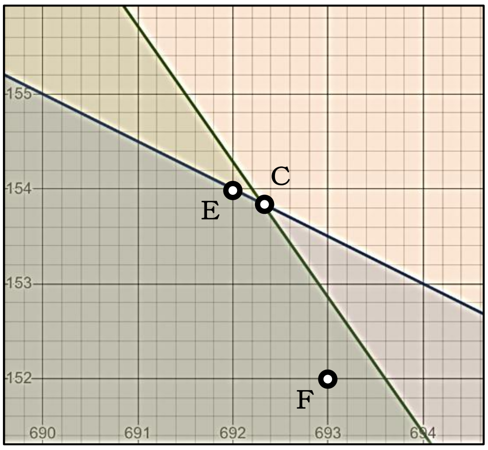
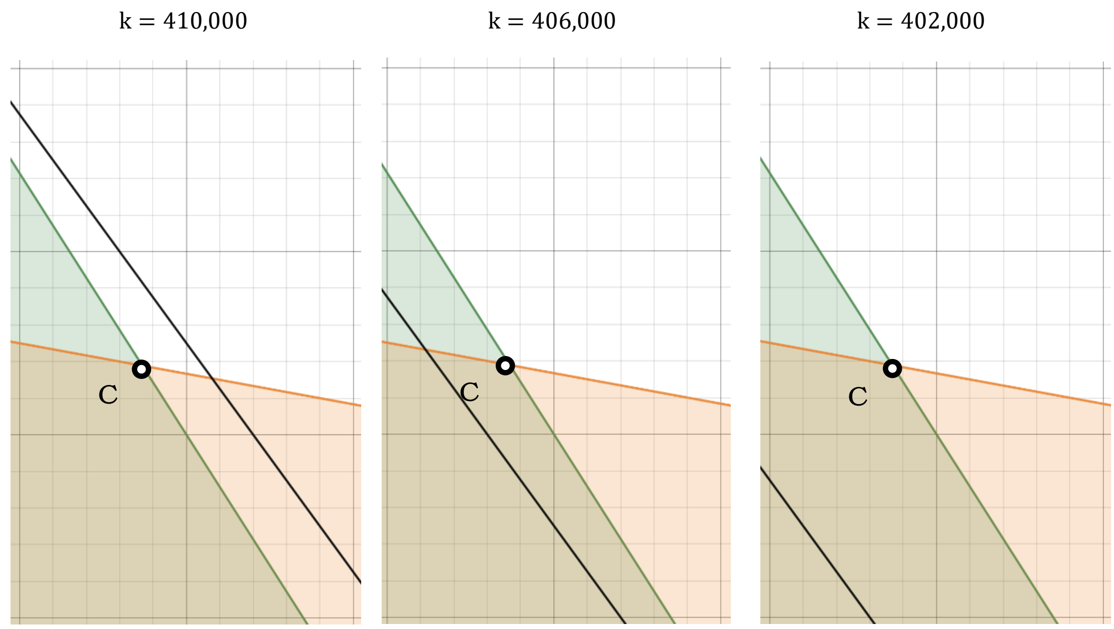
・$y=-\frac{5}{4}x+\frac{k}{400}$ に変形し、傾き$-\frac{5}{4}$ の直線が領域内を通るときの場合を考える。
・グラフから点Ｃを通るときの切片が最も大きくなることが分かる。</td><td>・xとyは整数の値をとると仮定するのが自然なことから、点Ｃのハンバーグ692.3個、オムレツ153.8個をどのように扱うかを考えさせたい。


図２　点Ｃ付近の、最大値の候補となる格子点Ｅ、Ｆ

点Ｅ(692, 154)→　500×692＋400×154=<u>407, 600</u>
点Ｆ(693, 152)→　500×693＋400×152=407, 300

・切片が最も大きくなるのは、点Ｂを通るときではなく、点Ｃを通るときであることを確認させたい。このとき、Desmosを利用することも考えられる。</td></tr>
</table>

分　岐 ２ 15分	＜想定される考え２＞$500x+400y=\mathrm{k}$ が領域内を通るとき、kの値が最も大きくなる場所が最大値である。 $\frac{k}{400}$ が最大 → kが最大	
	 図３　$y=-\frac{5}{4}x+\frac{k}{400}$と領域との関係	
	・点Ｅ(692, 154) →　500×692＋400×154=407, 600 が最大値となる。 **結果** ハンバーグを692個、オムレツを154個作るとき売り上げが最大40万7600円になると考えられる。	・＜想定される考え１＞と同様、点Ｅを特定させたい。 ・$500x+400y$ の最大値は407600 となる。【Ｃ】
	Ｑ３　ハンバーグとオムレツの価格を変えてもハンバーグを692個、オムレツを154個作るべきだろうか。【Ｄ】	
10分	＜検討＞ Ｓ１：点Ｅが最大だから、価格を変えても同じ個数つくるべき。 Ｓ２：価格が変わると、$500x+400y$の500と400の数値が変わるから、最大値の計算式が変わる。場合によっては、点Ａ、Ｂ、Ｄ付近になることもあるのではないか。	Ｔ１：(Ｓ１に対して)極端だけど、オムレツ０円で売ったとしてもオムレツは154個作った方がいい？ Ｔ２：(Ｓ２に対して)例えば、どんな価格設定だったら点Ｂ、ハンバーグ300個、オムレツ350個作るという結論になるだろう？
	・Ｑ３に関する考えをワークシートへ記録し提出する。	・意見を黒板で共有する。

研究実施校：神奈川県立光陵高等学校(全日制)
実　施　日：令和５年９月21日(木)
授業担当者：髙木　紀　教諭

実践事例２

（1） 単元指導計画

ア　科目名：数学Ⅰ

イ　単元名：図形と計量　三角比の拡張

ウ　単元の目標：図形と計量について、数学的活動を通して、その有用性を認識するとともに、図形の構成要素間の関係に着目し、事象を数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。

エ　単元の評価規準

知識・技能	思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
・鋭角の三角比の意味と相互関係について理解している。 ・三角比を鈍角まで拡張する意義を理解している。 ・鋭角の三角比の値を用いて鈍角の三角比の値を求める方法を理解している。 ・正弦定理や余弦定理について三角形の決定条件や三平方の定理と関連付けて理解している。 ・正弦定理や余弦定理などを用いて三角形の辺の長さや角の大きさなどを求めることができる。	・図形の構成要素間の関係を三角比を用いて表現し、定理や公式として導くことができる。 ・図形の構成要素間の関係に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすることができる。	・事象を図形と計量の考えを用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりしている。 ・問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。

オ　単元の指導と評価の計画　〇「記録に残す評価」　●「指導に生かす評価」

次	時	ねらい・学習活動	知	思	態	評価のポイント
第一次	3時間扱	・三角比の意味を理解し、日常生活や社会の事象、数学的事象を考察できる。	〇	●	〇	(知)正弦、余弦、正接が何か理解しているか評価する。 (思)事象に対して、三角比の考えを応用できているか評価する。 (態)単元の目標を理解し、学習を見通せているか評価する。
第二次	2時間扱	・三角比の相互関係を利用して、一つの三角比から他の三角比の値を求めることができる。	〇	〇		(知)三角比の相互関係や(90°$-\theta$)の三角比の性質を理解し、問題解決できているか評価する。
		・三角比を45°以下の角度の三角比で表すことができる。	〇	〇		(思)既習事項である三角比や三平方の定理などを通して、三角比の相互関係を考察しているか評価する。
第三次	7時間扱	・鋭角の三角比について考えてきたことを振り返り、鈍角の三角比について考察することを通して、鈍角の三角比の定義や、三角比を鈍角まで拡張する意義を理解できる。		〇	●	(知)鈍角において、定義を理解し、三角比を求めることができるか評価する。 (思)既習事項である三角比の相互関係や直線の傾きなどを考察し、関連や関係性を理解し、問題解決できているか評価する。
		・鈍角の三角比を鋭角の三角比で表すことができる。	〇			
		・直線の傾きと正接の関係を理解し、日常生活や社会の事象、数学的事象について考察できる。		〇	●	(態)鋭角の三角比についての理解を振り返り、鈍角の三角比についても理解できるよう、学習を調整しているか評価する。
		・鋭角のときと同様に、三角比の相互関係を利用して、一つの三角比から他の三角比の値を求めることができる。	〇			

第四次	３時間扱	・三角比を用いて三角形の辺や角の間に成り立つ関係を考察することを通して、三角形における三つの角と正弦の値との関係に着目し、正弦定理を導くことができるようにする。 ・与えられた条件から、正弦定理を利用して他の辺や角、外接円の半径を求められるようにする。	〇	〇		(知)正弦定理を理解し、問題解決に応用できているか評価する。 (思)事象に対して、正弦定理を活用して考察し、問題解決しているか評価する。
第五次	３時間扱	・三角比を用いて三角形の決定条件などを考察することから、余弦定理を導くことができるようにする。 ・条件から、余弦定理を利用して他の辺や角を求められるようにする。	〇	〇		(知)余弦定理を理解し、問題解決に応用できているか評価する。 (思)事象に対して、余弦定理を活用して考察し、問題解決しているか評価する。
第六次	２時間扱	・正弦定理や余弦定理を利用して、三角形の辺の長さや角の大きさをすべて決定できるようにする。		〇		(思)数学的事象に対して、正弦定理・余弦定理を活用して考察し、問題解決しているか評価する。
第七次	３時間扱	・三角比の考察から、三角形の面積の公式を導くことができるようにする。	〇	●		(知)三角形の面積の公式を理解し、問題解決に応用できているか評価する。 (思)　三角比の考察から、三角形の面積の公式を導いているか評価する。
第八次	２時間扱	・単元全体の学習内容を活用し、日常生活や社会の事象、数学的事象に対して、三角比を活用できるようにする。	〇	●	〇	(知・思・態)単元全体の学習内容を振り返り、事象に対して、三角比を利用して問題解決しているか評価する。

カ　授業実践例　(10時間目／25時間)　　【】内は対応する数学的活動

過程	学習内容	学習活動 Ｓ:予想される生徒の反応	指導上の留意点	評価のポイント (評価の観点)
導入 ２分	・前回の授業の振り返り ・三角比ドリル	「前授業振り返りマップ」を見ながら前回の授業で行ったことを班で共有する。 三角比ドリルに取り組む。	班で積極的に話し合って共有するよう促す。 ドリルに意欲的に取り組めるよう促す。 できるだけ多くの問題に取り組むよう指導する。	
展開 45分	・本時の目標「直線のなす角を求められるようになろう！」を提示し、例題を出題する。 例題 次の直線とx軸の正の向きとのなす角 θ をそれぞれ求めよ。 (1) $y = x$ (2) $y = -\sqrt{3}x$	プリント内の問題解決の方針を班で考えて、記入する。 どのような情報が必要か班で確認する。【Ａ２】 Ｓ：直線の式が分かれば良い。 　　直線の傾きが分かれば良い。	分度器で角度を測る以外は、どんな方法を用いても良いと伝える。 グラフごとに一つ情報を開示し、その情報を基に問題解決したとき、角度を求める方法は、測る以外にも三角	(思・主)グラフから分かる情報を整理し、角度を求めようとしている。

	(3) $y=\frac{1}{2}x+1$ ただし、(1)～(3)において次の情報のみを与える。 (1) 一次関数 (2) 直線の傾き (3) 点(−2, 0)、(0, 1)を通る直線 答え (1)45° (2)120° (3)約27°	グループワークで、例題に取り組む。開示情報を基に、直線のグラフの何が分かれば、なす角が分かるのか、考えを共有する。【B】 例題(1)に取り組む。 S：傾きから、直線とx軸のなす角は、$1:1:\sqrt{2}$ の直角三角形を利用すれば求められるのではないか。 (1)ができた生徒は黒板で解説する。	比を利用して求めることができることに気付かせる。 例題に取り組ませる際には「問題解決に必要な情報は何か」「情報をどう活用するか」等、生徒の数学的活動を促す発問を適切に行う。	
		例題(2)に取り組む。 S：傾きから、x軸の正の方向と直線のなす角は、$1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形を利用すれば求められるのではないか。 (2)ができた生徒は黒板で解説する。	生徒の解説の際には、30°を含む直角三角形・45°を含む直角三角形を用いた解法が予想される。それらの直角三角形が活用できなくても、問題解決ができ、どのような知識の関連があるのか思考するように適宜発問する。	(知・思)直線の傾きが分かれば、なす角の正接の値が分かり、それにより、なす角が分かることに気付くことができる。
		例題(3)に取り組む。 S：与えられた点から直線の式を求めることができる。 利用できる直角三角形がないことに気付く。 傾きから正接を求めることができる。 三角比の表を用いて、なす角を求めることができる。 (3)ができた生徒は黒板で解説する。	例題に取り組むなかで、自然と傾きからなす角を求めようとしてることに気付かせる。 直線の傾きと正接の関係に気付けない生徒が多い場合は、例題(1)(2)を振り返らせ、題意の角は何を利用して求めていたか考えさせる。 教科書巻末の三角比の表は使っても良いと伝える。	
	応用例題 2直線$y=\sqrt{3}x$, $y=4x$のなす鋭角θが約何度か求めよ。	応用問題に取り組む。【C】 S：グラフをかいてθを求めようとする。 それぞれの直線と、x軸の正の方向のなす角を求めることができる。 それぞれの直線と、x軸の正	例題(1)～(3)を通して、情報をどのように活用し、問題解決を行ったか振り返らせ、学んだ正接と直線の傾きの関係を理解させてか	(思・主)グループでの対話的活動を通して、問題解決までの大まかな方針を立てられる。

	答え 約16°	の方向のなす角の差が解答であると気付く。 できた生徒は黒板で解説する。	ら、問題解決に取り組ませる。理論と実践の往還により、理解を深める。 必要があれば解説をいれる。	
	最後の問の概要 「幼児が登れる安全でなるべく急な階段を用意したいです。階段の傾斜角は何度が良いか、班で考え、発表しなさい。」	幼児が階段を登る動画を見る。 プリントの最後の問に取り組む。【Ｄ２】 Ｓ：なるべく急な方が楽しいだろうから、手が付けるギリギリで角度を急にしたい。 怪我をしないように踏面を長くした方がよい。 考えた結果を発表する。	正解はないので、どのような基準で問題解決を行ったかをまとめさせる。	（知・思・主） 事象を数学的に捉え、数値的な指標を設けて、問題解決することができる。
まとめ ３分	・本時の授業の振り返り	「振り返りシート」に本時の授業の振り返りを入力する。	本時のポイントを押さえて、振り返りするよう促す。	(主)振り返りを通して、自己の学習を調整しようとしているか。

研究実施校：神奈川県立上溝南高等学校(全日制)
実　施　日：令和５年11月９日(木)
授業担当者：齋　孝徳　教諭

(2)　「指導と評価の一体化」の視点を踏まえた主体的・対話的で深い学びの実現に向けた指導と評価のポイント

ア　授業づくりについて

本研究では、数学科の学習指導要領改訂の趣旨である数学的活動の一層の充実に焦点を当てた。指導と評価の一体化の視点からも数学的活動を充実させることが重要であると考え、ねらいとしている。「数学的活動とは，事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決する過程を遂行すること」(高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説数学編数理編　P.25)と記されている。

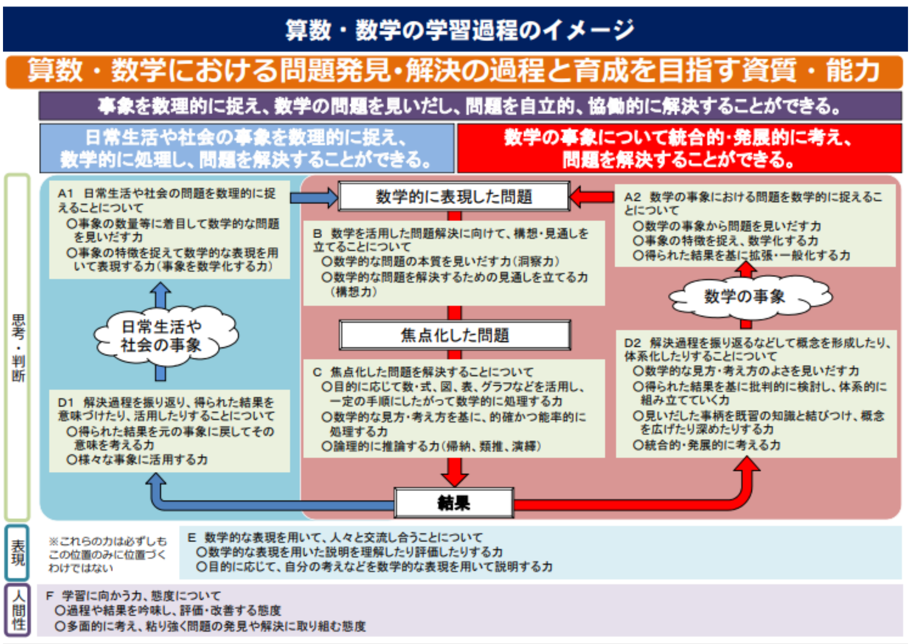


図４　算数・数学の学習過程のイメージ

数学的活動の一層の充実に向けて『算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめについて(報告)』(以下、「報告」という)における「算数・数学の学習過程のイメージ」(図４)を基盤と

し、二つの事例の実現を検討した。

実践事例１は、日常生活や社会の事象などを数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程に注目し、図４における左半分(日常生活や社会の事象)のサイクルに沿ってＡ１・Ｂ・Ｃ・Ｄ１の文言に対応した目標を次のように立てた。

表１　実践事例１における数学的活動とその目標

	Ａ１	Ｂ	Ｃ	Ｄ１
数学的活動	日常生活や社会の問題を数理的に捉えることについて	数学を活用した問題解決に向けて、構想・見通しを立てることについて	焦点化した問題を解決することについて	解決過程を振り返り、得られた結果を意味付けたり、活用したりすることについて
目標	問題を理想化し、式化することができる。	グラフ等を用いて式を視覚化し、解決の見通しを立てることができる。	最大となる点を求めることができる。	問題の条件を変えても結論は同じかどうか、解決過程を振り返って判断できる。

実践事例２は、数学の事象から問題を見いだし、数学的な推論などによって問題を解決し、解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的、体系的に考察する過程に注目し、図４における右半分(数学の事象)のサイクルに沿ってＡ２・Ｂ・Ｃ・Ｄ２の文言に対応した目標を次のように立てた。

表２　実践事例２における数学的活動とその目標

	Ａ２	Ｂ	Ｃ	Ｄ２
数学的活動	数学の事象における問題を数学的に捉えることについて	数学を活用した問題解決に向けて、構想・見通しを立てることについて	焦点化した問題を解決することについて	解決過程を振り返るなどして概念を形成したり、体系化したりすることについて
目標	事象を既習の知識と結び付け、考察できる。	他者と情報を共有し、問題解決までの見通しをたて、視覚化することができる。	直線の傾きと、なす角の正接の関係について理解できる。	事象に関しての「安全」や「高い」などの、個人の主観によるものを数値化して比較・考察することができる。

イ　本時の授業について

ａ　実践事例１

この学習過程のイメージの左側に位置する「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に処理し、問題を解決することができる。」のサイクルに焦点を置いた研究授業である。「報告」では「問題解決の過程において、よりよい解法に洗練されていくための意見の交流や議論など対話的な学びを適宜取り入れていく必要がある」(中央教育審議会　2016　p.5)と記されており、本研究のテーマである「数学的活動の一層の充実」を実現するためにはグループ活動やペア活動をはじめとした対話的な取組は必要不可欠である。本授業では生徒同士の学び合いから始まり、身に付けた知識の活用までを一つの流れとして授業展開の設定を行った。そのため、授業展開では二通りの分岐を考慮するなど、生徒の考えを基に進行していくことに重きを置くことで生徒の主体性が発揮されやすくなるように計画した。課題説明の後に個人での検討の時間を設け、グループ活動へと移行したのだが、グループ活動の早期の段階では図５のように極端な例を求める生徒や図６のようにハンバーグの材料を先に指定し、残りの材料でオムレツを作る計算をするといった、条件を限定

全部ハンバーグ
ひき肉80kg(余り０kg)
玉ねぎ400個(余り100個)
たまご400個(余り800個)

売り上げ40万円

図５　全てハンバーグの場合

$\frac{1}{2}x + y = 500$　…①　　①,②の解　$x = 692$,$y = 154$

$100x + 70y = 80000$　…②　　②,③の解　$x = 589$,$y = 301$

$\frac{1}{2}x + 3y = 1200$　…③　　③,①の解　$x = 300$,$y = 350$

図６　ハンバーグを70kgで作り、残りでオムレツを作る場合

した考え方をする生徒が数名いた。この段階で二元一次の連立不等式をつくる生徒が一定数現われることを想定していたが、授業前半部分では不等式に着目する生徒が少ないという結果となった。中にはハンバーグの個数をｘ個、オムレツの個数をｙ個としてひき肉、玉ねぎ、卵に関する式をそれぞれ二元一次方程式で表した生徒がいたが不等式の考え方にたどり着くまでには至らなかった。

そこで、当初予定していた分岐からは外れるが、「ハンバーグを減らしていくと売り上げは増えていくか」や「数学の力で簡単に解決できないか」など、遠回りにはなるが生徒から出た考えを汲み取っての発問を行った。この発問を受けて、図７のように玉ねぎ、ひき肉、卵に関する三つの二元一次方程式の中から二組を取り出し、三通りの連立方程式を解いたグループがあった。この中の一つに「ハンバーグを692個、オムレツを154個作ると売り上げが40万7600円になる」という本授業の課題の解が含まれているのだが、ここで新たな問「連立方程式を解いた解を答えとしてよいのか」に対し、更なる検討を促した。この検討の後に一つのグループの生徒が学習用端末のグラフ作成アプリを用いて、三つの式を可視化したものをスクリーンに投影した(図８)。三つの直線が交わることで作られる図形に着目したのが授業終了の５分前であり、当初の想定からは大幅に遅れることとなったが、「500x+400y=n」という売り上げの式を平行移動させることや、領域の考えに着目している意見が生徒からあがった所で授業は終了となった。

ハンバーグ【ひき肉70kg】　オムレツ【ひき肉10kg】
ひき肉70kg(余り10kg)　→ひき肉9.94kg(余り0.06kg)
玉ねぎ350個(余り150個)　→玉ねぎ142個(余り８個)
たまご350個(余り850個)　→たまご426個(余り424個)

売り上げ40万6800円

図７　３通りの連立方程式の解

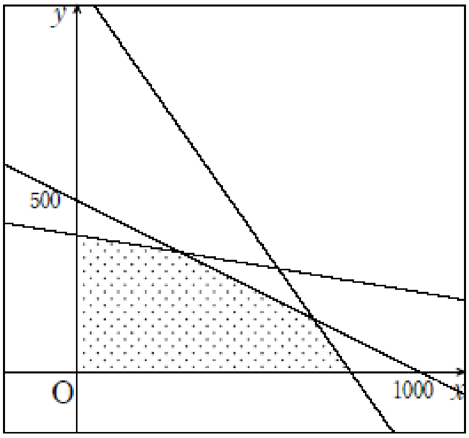


図８　３つの式から作られる領域を表したグラフ

当初の計画では線形計画法を用いて求めた解をもとに「ハンバーグとオムレツの価格を変えてもハンバーグを692個、オムレツを154個作るべきだろうか。」という条件を変えた問題を提示する予定であったがたどり着かなかった。

表３のように、一連の活動を表１のＡ１・Ｂ・Ｃ・Ｄ１に対応させた。

表３　実践事例１における具体的な数学的活動

	Ａ１	Ｂ	Ｃ	Ｄ１
具体的な数学的活動	数量に着目してｘ個、ｙ個とおこうとしたこと	数量の関係性を式にしたこと	連立させて式を解き、どの解が最適かを考えたこと	この解では材料が余るから、連立させたこの式は不適と考え、仮の答えを現実の問いに戻して吟味したこと 価格などの条件を変えてさらに発展させていくこと

「D1」の、価格などの条件を変えてさらに発展させていくことには時間の都合上到達しなかったが、「C」の部分に時間をかけたことで、他者との協働を通して深く理解させる時間を多く設けることができた。

生徒主体で学習活動を進行し、事象を数学的に解決しようとする姿勢、立式して各々の考えを共有しながら今の方針について考え、導き出された解が本当に正しいのか現実世界に戻して考えた一連の活動は「数学的活動の一層の充実」を実現した授業であったといえる。

課題としては二点挙げられる。一点目は発問の工夫である。授業の前半部分で不等式に着目できる生徒が少なく、これまでの学びと本授業の課題とを結び付けることができない場合を教師側があまり想定していなかった。本時の中で問題解決の過程のサイクルを完結させるために不等式の活用を促すための発問を投げかけることが必要であったのかもしれない。二点目は評価の在り方である。生徒の主体的・対話的な取組のような意思的な側面をどのように評価につなげていけばよいか。昨年度の数学科が実施した「記録に残す評価」の研究では自己分析シートの記述から生徒の取組を評価につなげている。本研究を単年で完結させるのではなく、このような過去の研究事例と紐付けての改善を行っていくことも大切であると考える。

ｂ　実践事例２

学習過程のイメージの右側に位置する「数学の事象について統合的・発展的に考え、問題を解決することができる。」のサイクルに焦点を置いた研究授業である。本授業では、「座標平面上の直線とｘ軸となす角の大きさ」を課題とし、教師の発問から生徒に疑問を持たせて問題解決させるという授業展開の設定を行った。従来の授業計画では、教師が例題を解説し、生徒が問題を解いていく形が多い。しかし本授業では、例題から、教師の発問によりグループ活動を通して考えを共有し、グループで考えをまとめ、生徒が黒板で解説するという授業計画で行った。

始めに、例題では、図９のように、座標平面上の直線のみを示し、「この例題を解くためにはどのような情報が必要だろうか。」という発問を行った。生徒は想定していた通り、「直線の式が分かれば良い。」や、「傾きと切片が分かれば良い。」など、直線とx軸とのなす角には直線の方程式が関係するのではないかと問題解決の方針を考えることができていた。

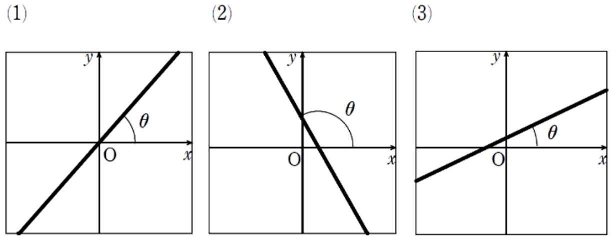


図９　例題　座標平面上の直線

次に、例題の問題ごとに(1)ｙ＝ｘ、(2)直線の傾きが－$\sqrt{3}$、(3)点(-2,0)と点(0,1)を通る直線という情報を与えた。例題(1)では、図10のように、直線からx軸に垂線を下ろし、直角三角形の辺の比1:1:$\sqrt{2}$からなす角が45°であることを求めた生徒が多く見られた。黒板の生徒の解説も直角三角形の辺の比を用いたものであったため、クラス全体で直角三角形を利用するということが共有された。例題(2)も(1)と同様に直角三角形を利用して、なす角を求める生徒が多くみられた。あるグループでは、直線が原点を通るように平行移動させ、直線上の点(-1,$\sqrt{3}$)から、鈍角の三角比の定義を用いて、正接の値を求めていた。この段階でなす角を求めるために正接を利用することが有効だと感じている生徒が見られたが、(正接)＝(直線の傾き)を利用して、解答を導いた生徒は見られなかった。生徒の解説でも直角三角形の辺の比を利用することが有効であるという段階でとどまった。例題(3)では点(-2,0)と点(0,1)を通る直線という与えられた情報から直線の方程式を求め、(1)(2)と同様に直角三角形の辺の比からなす角を求めようとする生徒が多くみられた。(3)で利用する直角三角形は有名直角三角形でないため、辺の比のみでは、なす角を求められない。そのため、多くの生徒が三角比を利用する必要があることに気が付き、三角比の表を用いてなす角を求めることができていた。生徒の解説においても有名三角形でない場合は、直角三角形の辺の比を求め、正接を利用することで問題を解決できることが共有された。例題(1)～(3)を通して、問題ごとに与えられた情報をどのように活用し、問題解決を行ったかをグループごとに振り返りを行ったところ、「傾きを使い直角三角形の辺の比を求める」や「傾きが分かれば、tanθからなす角が分かる」など正接と直線の傾きの関係に気が付いたグループが多く見られた。ある班で「傾き(の情報)がほしい」ではなく「高さがほしい」と話していた。これは底辺に１に対する高さは傾きであるので、なす角θを求めることに傾きが必要であると考えているようであった。また、最後までsinθを利用してなす角θを求めている班もあったが、三角比を利用するという意味では本質的には理解している様子だった。

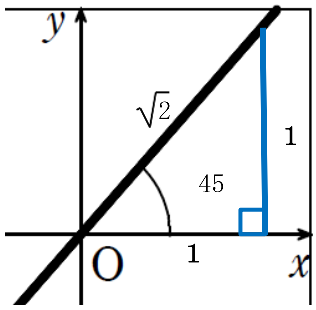


図10　例題(1)の生徒の解答

最後に応用例題としてy＝$\sqrt{3}$xと ｙ＝4xの２直線のなす角θを求めることに取り組ませた。例題とは異なりグラフと求めるなす角θを図示していないため、どのグループもグラフを書き、求めるなす角θを視覚的に理解することから取り組んだ。ある班では、２直線のグラフの位置関係が間違っている生徒に対して、同じ班の生徒が傾きの大きさと直線のかき方について説明している様子も見られた。生徒の多くが、例題の生徒の解説で共有したことを活用し、直角三角形の辺の比と正接を利用して２直線のなす角をそれぞれ求め、２直線のなす角の差を求めていた。ある班では、２直線のなす角を直接求めることができないかと考え、ｙ＝4x　からy＝$\sqrt{3}$xに垂線を引くことでできる直角三角形の辺の比を求めようと試行錯誤している様子も見られた。生徒の解説(図11)で、２直線のグラフのなす角の求め方を共有することができた。最後の問いについては説明のみをして、授業振り返りを行い、授業は終了となった。授業内では、「傾き＝tanθ」であるという結論が出ている班が少なく、知識・技

能の定着という面では授業目標に到達できなかったのではないかと心配していたが、個々の振り返りには「傾き＝tan θ」と同様の文章表現が多く、「tan」「傾き」「求める」のワードが頻出し、関連も強く表記されており、「傾き＝tan θ」に生徒が到達していた。

表４のように、一連の活動を表２のＡ２・Ｂ・Ｃ・Ｄ２に対応させた。

$y=\sqrt{3}x$ $\tan\theta=\sqrt{3}$ $\theta=60°$	$y=4x$ $\tan\theta=4$ 三角比の表より $\theta=$ 約$76°$
$76°-60°=$約$16°$	

図11　応用例題　の生徒の解説

表４　実践事例２における具体的な数学的活動

	Ａ２	Ｂ	Ｃ	Ｄ２
具体的な数学的活動	なす角を求めるための方針をグループで検討し、三角比と関係に気が付くこと	例題の開示情報をもとに、グループで直線のグラフの何が分かれば、なす角が分かるのか、問題解決までの見通しを立て、生徒の解説で視覚化し共有すること	直線の傾きとなす角の正接の関係を用いて、応用例題に取り組むこと	数学の事象に関して、個人の主観によるものを数値化して比較・考察すること

教科書の例題に対して生徒が自分で考え、解決するための方針を立てて導き出していく過程は例題に対してもこの問題はそういうものだと決めつけて暗記するのではなく学習指導要領にもある「数学を既成のものとみなしたり，固定的で確定的なものとみなしたりせず，数学に創造的に取り組もうとする態度を養うことも期待される」(学習指導要領(平成30年告知)解説　数学編　数理編 p. 10)という文言にも沿った展開だと考えられる。

二つの実践を通して私たちが陥りがちな、例題の説明→問題練習→解説といった授業の構成は「創造的」から離れた位置にあるのではないかと考えるようになった。同時にこういった授業を行っていくうえで切り離せない進度の問題も、例題の解説及び演習の解説も少なくすることができると感じ、大きな影響はないと感じた。また、毎回実践事例のような授業を行う必要はなく、既習事項を活用するような問題に対して行っていくことが一歩目になると感じた。特に実践１のような現実的な問題を解決していくような問いは１単元で１回行えれば良いと考える。数学的活動が学びに与える影響は大きく、引き続き、生徒が学びたい、もっと深めたいと思える問いづくりを考えていく必要がある。

参考文献

中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会　2016　『算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめについて(報告)』
https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/sonota/1376993.htm　(2024年１月29日取得)