数学A課題(教科書P28～30)の解答

P28

問２５　(1) 70 (通り)　　(2) 35 (通り)

解説 (1) 8人の中からA組に入れる4人の選び方は ${}_8C_4$ 通り

残り4人をB組に入れるから、${}_4C_4=1$通り

よって、求める分け方の総数は、積の法則により

$${}_8C_4\times{}_4C_4=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times1=70\ (\text{通り})$$

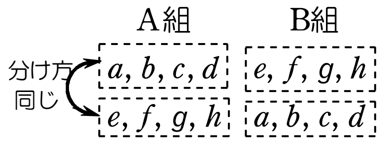
(2) (1)の分け方において、

A, Bの区別をなくすと同じ分け方になるものが

2! 通りずつある。

よって、求める分け方の総数は

$$\frac{70}{2!}=\frac{70}{2\cdot1}=35\ (\text{通り})$$



★ここまでできれば、問題集「WRITE数学A」のp.14もできます。
「WRITE数学A」もできた人は、次の問題にチャレンジ！

1 12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1)　A，B，C の 3 つの組に，4 人ずつ分ける。

(2)　4 人ずつの 3 つのグループに分ける。

(3)　5 人，4 人，3 人の 3 つのグループに分ける。

(4)　6 人，3 人，3 人の 3 つのグループに分ける。

2 10 人を 3 人，3 人，4 人の 3 つの組に分けるとき，分け方は何通りあるか。

P29

問２６　６０個

解説　1を1個，2を2個，3を3個の合計6個を並べるから

$$\frac{6!}{1!2!3!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}=60\ (\text{個})$$

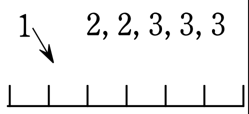
別解 P29の上のように、数字を置く場所 6 カ所に数字を置くと考える。

6カ所のうち、1を置く1カ所の選び方 ${}_6C_1$ 通り

残り5カ所のうち、2 を置く2カ所の選び方 ${}_5C_2$ 通り

残り3カ所に3を置くから ${}_3C_3$ 通り

よって、並べ方の総数は、積の法則により



$${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=\frac{6}{1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\frac{3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}=60\ (\text{個})$$

この式の分母と分子をよく見ると、上の式と同じですね！

次のページに行く前に、少し練習しましょう。

3 a が 4 個，b が 2 個，c が 3 個の 9 文字全部を 1 列に並べるとき，並べ方は何通りあるか。

4 a，a，b，b，b，c，c，c の 8 文字をすべて使って文字列を作るとき，文字列は何個作れるか。

★同じ文字を含む順列の総数の求め方が、最短経路の道順の数え方に応用できます。

P30

問２７　(1)　７０(通り)　　(2)　３０(通り)　　(3)　４０(通り)

解説 (1) AからBまで右に4区画、上に4区画進むから、

右に1区画進むことを→，上に1区画進むことを↑で表すと

→を4個、↑を4個を並べた順列と考えることができる。

よって、求める最短経路の数は

$$\frac{8!}{4!4!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=70\ (\text{通り})$$

別解　${}_8C_4$ または　${}_8C_4\times{}_4C_4$ でもよい

(2) AからCまでは、→を2個、↑を1個の順列と考えて $\frac{3!}{2!1!}$ (通り)

CからBまでは、→を2個、↑を3個の順列と考えて $\frac{5!}{2!3!}$ (通り)

よって、AからCを通ってBまで行く最短経路の数は、

$$\frac{3!}{2!1!}\times\frac{5!}{2!3!}=30\ (\text{通り})$$

別解　${}_3C_2\times{}_5C_2$ や ${}_3C_1\times{}_5C_2$などでもよい

(3) (1), (2) より、AからBまで行くすべての経路 70通りの中で、

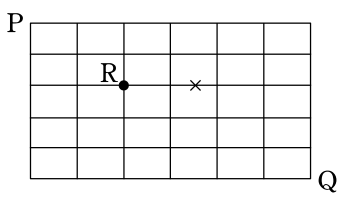
Cを通る道順が 30通りあるから、

AからCを通らずにBまで行く最短経路の数は、

$70-30=40$ (通り)

★ここまでできれば、問題集「WRITE数学A」のp.15もできます。
「WRITE数学A」もできた人は、次の問題にチャレンジ！

5 右の図のような道のある町で，P から Q まで遠回りをしないで行くのに，次のような道順は何通りあるか。

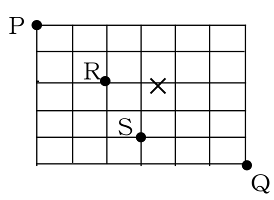


(1)　R を通って行く。

(2)　×印の箇所は通らずに行く。

(3)　R を通り，×印の箇所は通らずに行く。

6 右の図のような街路で，P から Q まで行く最短経路は，次の場合について何通りあるか。



(1)　総数

(2)　R を通る経路

(3)　R，S をともに通る経路

(4)　×印の箇所は通らない経路

表の問題$\boxed{1}$～$\boxed{6}$の答と解説

$\boxed{1}$ 解答　(1)　34650 通り　　(2)　5775 通り　　(3)　27720 通り
(4)　9240 通り

$\boxed{2}$ 解答　2100 通り

$\boxed{3}$ 解答　1260 通り

$\boxed{4}$ 解答　560 個

$\boxed{5}$ 解答　(1)　210 通り　　(2)　362 通り　　(3)　150 通り

$\boxed{6}$ 解答　(1)　462 通り　　(2)　210 通り　　(3)　72 通り　　(4)　362 通り

解説

$\boxed{1}$ (1)　A の 4 人の選び方は　${}_{12}C_4$ 通り
残りの 8 人から B の 4 人の選び方は　${}_{8}C_4$ 通り
A，B の人が決まれば，残りの C の 4 人は決まる。
よって，求める分け方の総数は

$$ {}_{12}C_4\times{}_{8}C_4=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=34650\ (\text{通り}) $$

(2)　(1) で，A，B，C の区別をなくすと，
同じ分け方が 3! 通りずつできる。
よって，求める分け方の総数は　　$34650\div3!=5775$ (通り)

(3)　まず 12 人から 5 人を選ぶ。
次に，残った 7 人から 4 人を選ぶと，残りの 3 人のグループは決まる。
よって，求める分け方の総数は

$$ {}_{12}C_5\times{}_{7}C_4=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=27720\ (\text{通り}) $$

(4)　6 人，3 人，3 人の組を，それぞれ A，B，C とすると，
A，B，C に分ける方法は　　${}_{12}C_6\times{}_{6}C_3$ (通り)
B，C の区別をなくすと，同じ分け方が 2! 通りずつできる。
よって，求める分け方の総数は

$$ {}_{12}C_6\times{}_{6}C_3\div2!=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{1}{2} $$
$$ =9240\ (\text{通り}) $$

$\boxed{2}$ まず，10 人を 3 人，3 人，4 人の 3 つの組 A，B，C に分ける。
A 組の 3 人の選び方は ${}_{10}C_3$ 通りある。
B 組の 3 人の選び方は残りの 7 人から選ぶので ${}_{7}C_3$ 通り，
A 組，B 組の人が決まれば，残りの C 組の 4 人は決まる。
よって，この分け方の総数は，積の法則により

$$ {}_{10}C_3\times{}_{7}C_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=4200\ (\text{通り}) $$

この分け方で，同じ人数の組の A，B の区別をなくすと
2! 通りずつ同じ組分けができる。
よって，分け方の総数は　$\dfrac{4200}{2!}=\dfrac{4200}{2\cdot1}=2100$ (通り)

$\boxed{3}$ 同じ文字が 4 個，2 個，3 個あり，これらを 1 列に並べるから

$$ \frac{9!}{4!2!3!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\times2\cdot1\times3\cdot2\cdot1}=1260\ (\text{通り}) $$

別解　${}_{9}C_4\times{}_{5}C_2\times{}_{3}C_3=1260$ (通り)

$\boxed{4}$ a が 2 個，b が 3 個，c が 3 個の合計 8 個全部を 1 列に並べるから

$$ \frac{8!}{2!3!3!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\times3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1}=560\ (\text{個}) $$

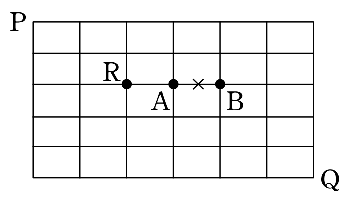
別解　${}_{8}C_2\times{}_{6}C_3\times{}_{3}C_3=560$ (通り)

$\boxed{5}$ (1)　右へ 1 区画進むことを → で，下へ 1 区画進むことを ↓ で表す。
P から R まで行く最短の道順は，
→ 2 個と ↓ 2 個の順列で表されるから　$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

R から Q まで行く最短の道順は，
→ 4 個と ↓ 3 個の順列で表されるから　$\dfrac{7!}{4!3!}$ 通り
よって，R を通って行く最短の道順の総数は，積の法則により

$$ \frac{4!}{2!2!}\times\frac{7!}{4!3!}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=210\ (\text{通り}) $$

(2)　× 印の箇所を通る経路は、右の図の 2 点 A，B をともに通る
すなわち　P → A → B → Q
の最短経路と考えればよい。



P から A まで行く最短の道順は　$\dfrac{5!}{3!2!}$ 通り
A から B まで行く最短の道順は　1 通り
B から Q まで行く最短の道順は　$\dfrac{5!}{2!3!}$ 通り
よって，× 印の箇所を通る最短の道順は，積の法則により

$$ \frac{5!}{3!2!}\times1\times\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=100\ (\text{通り}) $$

また，P から Q まで行く最短の道順の総数は

$$ \frac{11!}{6!5!}=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=462\ (\text{通り}) $$

したがって，× 印の箇所を通らないで行く最短の道順の総数は
$462-100=362$ (通り)

(3)　R を通り × 印の箇所を通る経路は P → R → A → B → Q であるから，
積の法則により

$$ \frac{4!}{2!2!}\times1\times1\times\frac{5!}{2!3!}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=60\ (\text{通り}) $$

R を通って行く最短の道順の総数は，(1) から　210 通り
よって，R を通り，× 印の箇所は通らないで行く最短の道順の総数は
$210-60=150$ (通り)

$\boxed{6}$ (1)　右に 1 区画進むことを →，下に 1 区画進むことを ↓ で表すと，
P から Q に行く最短経路の総数は，
6 個の → と 5 個の ↓ を 1 列に並べる順列の総数に等しい。
よって　　$\dfrac{11!}{6!5!}=462$ (通り)

(2)　P から R まで行く最短経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り
R から Q まで行く最短経路は　$\dfrac{7!}{4!3!}$ 通り
よって，R を通る最短経路の総数は　$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{7!}{4!3!}=210$ (通り)

(3)　P から R まで行く最短経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り
R から S まで行く最短経路は　$\dfrac{3!}{2!}$ 通り
S から Q まで行く最短経路は　$\dfrac{4!}{3!}$ 通り
よって，R，S をともに通る最短経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{4!}{3!}=72$ (通り)

(4)　× 印の区間の左端を A，右端を B とする。
P から A まで行く最短経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}$ 通り
B から Q まで行く最短経路は　$\dfrac{5!}{2!3!}$ 通り
よって，× 印の箇所を通る最短経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}\times\dfrac{5!}{2!3!}=100$ (通り)
したがって，× 印を通らない最短経路は　$462-100=362$ (通り)

★ここまでできるようになったら、教科書P31もやってみよう！