今日の目標 ⇒ 数列の極限

数列の極限　大きく分けて4種類！

収束	**値 α に収束**	$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$	…… **極限は** α
発散（収束しない）	**正の無限大に発散**	$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$	…… **極限は** ∞
	負の無限大に発散	$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$	…… **極限は** $-\infty$
	振動		…… **極限は ない**

練習２　第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $3n$　　(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^n$　　(3) $-5n^2$　　(4) $1+(-1)^n$

やる気ある人は頑張ろう！

演習問題１　次の数列の極限値を求めよ。

(1) $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, ……, $\frac{2n-1}{n}$, ……　　(2) 1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ……, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, ……

演習問題２　第 n 項が次の式で表される数列の極限について調べ，極限がある場合は，それを求めよ。

(1) n^2-4　　(2) $\frac{3}{2^n}$　　(3) $\frac{n}{(-1)^n}$　　(4) $1-\sqrt{n}$

(5) $3+(-1)^n$　　(6) $\sin n\pi$　　(7) $\cos n\pi$　　(8) $\tan n\pi$

演習問題３　$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -3$ のとき，次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)$　　(2) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$　　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$　　(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2b_n}{2a_n+b_n}$

数列の極限の性質

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする。

1　$\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$　　ただし，k は定数

2　$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \alpha+\beta$，　$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \alpha-\beta$

3　$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \alpha\beta$

4　$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$　　ただし，$\beta \fallingdotseq 0$

例題１　$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -1$ のとき，次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)$　　(2) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$　　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}$

解答

(1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n) = 2\cdot3+(-1) = 5$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 3\cdot(-1) = -3$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n} = \frac{3-(-1)}{3+(-1)} = \frac{4}{2} = 2$

練習３　$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -2$ のとき，次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n)$　　(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)$　　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-b_n}{a_n+b_n}$

2年までの復習 解答　(1) 2　(2) 4　(3) 3　(4) 1　解答　(5) 3　(6) 1　(7) -2　(8) 6

練習１ 解答　(1) 2　(2) 0　(3) 2　練習２ 解答　(1) 発散，∞　(2) 収束，0　(3) 発散，$-\infty$　(4) 発散(振動)，極限はない　練習３ 解答　(1) -1　(2) 0　(3) -4　練習４ 解答　(1) $\frac{5}{3}$　(2) $\frac{3}{5}$　(3) 2　(4) 0　(5) 0　(6)　演習１ 解答　(1) 2　(2) 0　演習２ 解答　(1) ∞　(2) 0　(3) 振動　(4) $-\infty$　(5) 振動　(6) 0　(7) 振動　(8) 0　演習３ 解答　(1) 5　(2) -3　(3) $-\frac{1}{3}$　(4) -9　演習４ 解答　(1) 2　(2) $\frac{3}{2}$　(3) 0　(4) ∞　(5) $-\infty$　(6) 1　演習５ 解答　(1) ∞　(2) $-\infty$　(3) ∞

今日の目標 ⇒ 数列の極限

例題 2　次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+1}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+3}$　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{5n+4}$

考え方　分母が 0 以外の値に収束するように，分母と分子を (1) と (3) は n で，(2) は n^2 で割る。

解答

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$　← $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n^2}}=\frac{0}{1}=0$　← $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}=0$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{5n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5+\frac{4}{n}}=\infty$　← $\lim_{n\to\infty}n=\infty$，$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$

練習 4　次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{5n-2}{3n+1}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+6}{5n^2+4n-7}$　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-6}{2n^2+n-9}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n^2-3}$　(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2}{2n^3+1}$　(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{9n+8}$

例題 3　次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2-2n)$　(2) $\lim_{n\to\infty}(3n-n^3)$

解答

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2-2n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)$　← n^2 でくくる

$=\infty$　← $\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}(3n-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{3}{n^2}-1\right)$　← n^3 でくくる

$=-\infty$　← $\lim_{n\to\infty}n^3=\infty$，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}-1\right)=-1$

練習 5　次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(3n^2-n)$　(2) $\lim_{n\to\infty}(-n^3+5n^2)$

例題 4　極限 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ を求めよ。

解答　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$　← 分子を有理化

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$　← $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\infty$

練習 6　次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$　(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$

数列の大小関係と極限

1　すべての n について $a_n\leqq b_n$ のとき

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$　ならば　$\alpha\leqq\beta$

2　すべての n について $a_n\leqq c_n\leqq b_n$ のとき

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$　ならば　$\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$

注意　2を「はさみうちの原理」ということがある。

1において，常に $a_n<b_n$ であっても $\alpha=\beta$ となることがある。たとえば，$a_n=1-\frac{1}{n}$

例題 5　極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$ を求めよ。

解答　$-1\leqq\sin\frac{n\pi}{4}\leqq1$ であるから　$-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{4}\leqq\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{4}=0$

練習 7　次の極限を求めよ。ただし，(2) の θ は定数とする。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos n\theta$